EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60
X - 15 JULI 1960

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

Overdruk uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jrg. 47, No IV (Maart 1960).

BOEKBESPREKING

P. Wijdenes, MIDDEL-ALGEBRA, Leerboek voor aktestudie en inleiding tot de Analyse, Deel II, *6e druk*. P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 377 blz., ing. *f* 17.—, geb. *f* 19.—.

Het is niet de bedoeling hier een kritische bespreking van dit werk te geven, dat is bij vorige drukken al wel gebeurd. M.i. is het echter niet overbodig nog eens de aandacht te vestigen op dit voortreffelijke studieboek, waarvan nu de (ongewijzigde) 6e druk verschenen is (van deel I is de 6e druk in 1957 verschenen). Dit werk was aanvankelijk voor de akte M.O. KI geschreven, doch het bevat zeer veel stof, welke ook voor de M.O. A candidaat onontbeerlijk is.

Voor de meeste M.O. A candidaten, evenals voor vele studenten, is de stap van de H.B.S. stof naar de abstrakte algebra, de lineaire algebra en de analyse te groot. Ze missen de routine in het werken met determinanten, lineaire vergelijkingen, complexe getallen, limieten, reeksen en het splitsen in partieelbreuken. Ze hebben niet veel benul van het elimineren, van continuïteit, convergentie (laat staan gelijkmatige convergentie) en zelfs van het werken met ongelijkheden! Dit bezwaar is te ondervangen door eerst een gedeelte van dit boek door te werken, bijv. van deel I de hoofdstukken I, II, V–XI, XVI geheel en III, IV, XII, XIV, XV ten dele. Van deel II zijn nodig de hoofdstukken I–IV, VII, VIII geheel en IX gedeeltelijk. De theorie wordt, op de ons van de schrijver bekende wijze, duidelijk en uitvoerig behandeld en aan vele geheel uitgewerkte voorbeelden toegelicht. Men vindt er 206 in deel I en 142 in deel II. In geen ander werk over deze stof vindt men er ook maar half zo veel! Bovendien bevatten beide delen een groot aantal vraagstukken bij elk hoofdstuk, zodat er oefenmateriaal genoeg is.

Het 1e deel behandelt in hoofdzaak de leer van de hogeremachtsvergelijkingen, voorafgegaan door hoofdstukken over bewijzen door volledige inductie, ongelijkheden, permutaties, combinaties en variaties, over de *n*e macht van een binomium en van een polynomium, over rekenkundige reeksen van hogere orde, determinanten, lineaire vergelijkingen en complexe getallen en gevolgd door een hoofdstuk over splitsing in partieelbreuken.

In het 2e deel vindt men in hoofdzaak de theorie van de oneindige reeksen, voorafgegaan door hoofdstukken over het onmeetbare getal en de limieten, welke zeer uitvoerig behandeld zijn (evenals de reeksen trouwens). In een apart hoofdstuk worden de exponentiële en logaritmische functies van een complexe veranderlijke besproken en het laatste hoofdstuk is gewijd aan de kettingbreuken, waarvan de student toch eigenlijk ook iets moet weten.

Aan het eind van deel II vindt men nog interessante historische aantekeningen (van Dr. J. E. Dijksterhuis) betreffende de wiskundigen, die in dit boek vermeld zijn (en dat zijn er bijna 50).

Ik kan dit boek van harte aanbevelen als inleiding voor M.O. A candidaten en voor studenten, die de wiskunde gaan beoefenen, in het algemeen, zeer zeker ook voor degenen, die voor actuaris studeren.

Ik doe dit uit een langjarige ervaring, ik gebruik het boek al van de 1e druk af (die in 1921 verscheen) bij mijn lessen! H. HERREILERS.

Besluit van 8 januari 1958 tot vaststelling van programma's voor de akten Wiskunde M.O. A:

1. *Algebra:* kennis van de beginselen van de algebra.
2. *Analyse:* kennis van de differentiaal- en de integraalrekening van functies van één veranderlijke; theorie der oneindige reeksen.
3. *Analytische meetkunde:* kennis van de hoofdstukken van de euclidische meetkunde van het platte vlak en van de ruimte analytisch behandeld.
4. *Projectieve en beschrijvende meetkunde:* kennis van de beginselen van de projectieve meetkunde en van de centrale projectie.

Van te voren, in nr. IV van jg. 45 (1957/'58), blz. 163–166 van dit tijdschrift, heeft de commissie voor dit examen aangegeven, waar de stof te vinden is; daarbij zijn de Middel-Algebra en de Getallenleer genoemd.

MIDDEL-ALGEBRA, DEEL I [1]), *6e druk* *f* 17.—; geb. *f* 19.—

Hoofd-stuk		Blad-zijden	Figuren	Voor-beelden
I	Bewijzen door volledige inductie	1— 7		1— 9
II	Ongelijkheden	8— 25	1— 17	10— 22
III	Permutaties en combinaties			
	Machten van een tweeterm en van een veelterm	26— 56	18, 19	23— 48
IV	Rekenkundige reeksen van hogere orde	57— 80	20— 23	49— 63
V	Determinanten	81—113	24 — 25	64— 89
VI	Lineaire vergelijkingen . . .	114—137	26— 29	90— 96
VII	Complexe getallen	138—169	30— 74	97—113
VIII	Het begrip functie. Continuïteit	170—197	75— 98	114—119
IX	Algemene eigenschappen van de veelterm in x. Nulpunten. Over de wortels van een hogeremachtsvergelijking	198—256	99—107	120—148
X	Binomiaalvergelijkingen . .	257—275	108—120	149—156
XI	Oplossing van de derde- en vierde-machtsvergelijking .	276—289	121—123	157—163
XII	Scheiding der reële wortels van een hogere-machtsvergelijking	290—315	124—139	164—173
XIII	Benadering van de wortels .	316—345	140—160	174—182
XIV	Symmetrische functies . . .	346—362		183—188
XV	Eliminatie	363—393	161—165	189—199
XVI	Splitsing van breuken . . .	394—406	166	200—206
	Register	407—416		
	Formules	417		

MIDDEL-ALGEBRA II, *6e druk* *f* 17.—; geb. *f* 19.—

Hoofd-stuk		Blad-zijden	Figuren	Voor-beelden
I	Onmeetbare getallen	1— 28	—	—
	De stelling van D'ALEMBERT	28— 32		
II	Varianten en limieten van varianten	33— 77	1—12	1— 17
III	Limieten van functies . . .	78—117	13—30	18— 37
IV	Reeksen met reële termen .	118—133		
	Kenmerken van convergentie	133—167	31—35	38— 67
V	Reeksen met complexe termen	168—185	36—40	68— 75
VI	Wederkerige reeksen	186—207	—	76— 84
VII	Gelijkmatige convergentie .	208—230	41	85— 91
VIII	Exponentiële en logaritmische functies van z	231—258	41—50	92—108
IX	Afleiding van reeksen . . .	259—292	51—54	109—121
X	Kettingbreuken	293—345	55, 56	122—142
	Historische aantekeningen .	346		
	Register	363		
	Formules	370		

[1]) Opleiders voor de akte Wiskunde M.O. A gelieven aanvragen om zichtzending of pres. ex. te richten tot de schrijver.

HISTORISCHE ACHTERGRONDEN VAN DE INFINITESIMAALREKENING [1]

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Voor het begrijpen van de moeilijkheden, die onze leerlingen kunnen hebben bij hun pogingen de betekenis van nieuwe begrippen, die we hun voorzetten, te doorzien, kan het voor ons van grote betekenis zijn kennis te nemen van de wijze, waarop deze begrippen in de historie tot stand gekomen zijn. Als we ons realiseren, welke moeilijkheden men in de loop der jaren of zelfs der eeuwen heeft moeten overwinnen om tot klaarheid te komen over begrippen, die we onze leerlingen plegen voor te zetten, dan valt het ons lichter te beseffen, dat zij de gedoceerde stof niet zo gemakkelijk tot hun eigendom kunnen maken als we dat graag zouden willen of zelfs van hen verwachten. Bovendien kan het kennisnemen van de historische ontwikkeling ook nuttig zijn voor het vinden van een geschikte aanpak om onze leerlingen bepaalde inzichten bij te brengen. Het komt immers vaak voor, dat een didactisch verantwoorde benadering van een probleem parallel met de historische benadering loopt. Hoewel ik dit geenszins als een algemene wet zou willen uitspreken, geloof ik toch wel te mogen beweren, dat in elk geval historische kennis bevruchtend zal werken op didactisch inzicht. Het is om deze reden, dat ik het verantwoord gevonden heb op dit congres een historisch onderwerp aan te snijden, namelijk het tot stand komen van de begrippen differentiaalquotiënt en integraal.

Een volledige bespreking van dit onderwerp zou te veel tijd kosten. Ik heb me daarom moeten beperken tot die periode, waarin de eigenlijke infinitesimaalrekening tot stand is gekomen, de 17e eeuw. Ik wil me dus beperken tot het weergeven van de ideeën van Leibniz en Newton en van hun onmiddellijke voorgangers.

Een belangrijk probleem bij het leggen van de grondslagen voor de infinitesimaalrekening is de structuur van het continuum. Reeds in de Griekse oudheid was dit probleem onderwerp geweest van uitvoerige discussies. De vraag, of het continuum al of niet opgebouwd

[1] Met toestemming overgedrukt uit Faraday (Verslag van het twaalfde Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen op 14 april 1958) en iets uitgebreid.

gedacht kan worden uit elementair-bestanddelen, waarvan de dimensie één lager is dan die van het continuum zelf, gaf aanleiding tot de paradoxen van Zeno en de weerlegging daarvan door Aristoteles. In de 17e eeuw laait deze strijd opnieuw op. De verdediger van het standpunt, dat een lijn op de een of andere manier opgevat kan worden als een som van punten, een oppervlak als een som van lijnen, enz., is Cavalieri (1598?—1647). Zijn opvatting wordt wel genoemd de leer der *indivisibilia*. Om de oppervlakte van een figuur te vinden trekt hij aan deze figuur een raaklijn en trekt hij vervolgens alle koorden, die evenwijdig aan deze raaklijn zijn. De som van deze koorden is dan volgens hem een maat voor de oppervlakte van de figuur. Op dezelfde wijze is de som van een serie parallelle doorsneden een maat voor de inhoud van een figuur. Op deze wijze komt hij tot de bekende stelling van Cavalieri, volgens welke twee lichamen gelijke inhoud hebben, als overeenkomstige doorsneden met evenwijdige vlakken aan elkaar gelijk zijn. Hij gaat echter nog verder en bewijst b.v., dat in parallellogram ABCD (fig. 1)

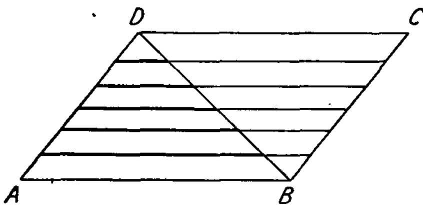


Fig. 1.

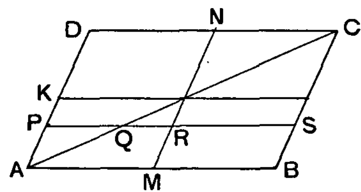


Fig. 1a.

de som van de kwadraten van de lijnstukken evenwijdig aan AB gelijk is aan 3 maal de som van de kwadraten van de lijnstukken, die in driehoek ABD evenwijdig aan AB getrokken zijn.

Hoe Cavalieri dit bewezen heeft, is mij niet bekend. Een afleiding, die wel in zijn geest is, is de volgende. In fig. 1a zijn K, M en N de middens van AD, AB en DC, PS is evenwijdig aan AB, P loopt van A naar D. Nu is daarbij

$$\Sigma\, PQ^2 = \Sigma\, (PR - RQ)^2 = \Sigma\, PR^2 + \Sigma\, RQ^2 - 2\Sigma\, PR \cdot RQ.$$

Hierin is

$$\Sigma\, PR^2 = \tfrac{1}{4}\Sigma\, PS^2,$$

$$\sum_A^D RQ^2 = 2\sum_A^K RQ^2 = 2\sum_A^K PQ^2 = \tfrac{1}{4}\sum_A^D PQ^2$$

(omdat de inhoud van een lichaam 8 maal zo groot wordt, als we de figuur met 2 vermenigvuldigen en $\Sigma\, PQ^2$ een inhoud voorstelt),

$$2\Sigma\, PR \cdot RQ = 0.$$

Dus is

$$\Sigma\, PQ^2 = \tfrac{1}{4}\Sigma\, PS^2 + \tfrac{1}{4}\Sigma\, PQ^2,$$

$$\Sigma\, PS^2 = 3\Sigma\, PQ^2, \quad \text{q. e. d.}$$

Hieruit leidt hij af, dat de inhoud van een kegel gelijk is aan het derdedeel van de inhoud van een cilinder met dezelfde hoogte en hetzelfde grondvlak. Men is het er algemeen over eens, dat zijn ideeën uitermate vaag en duister zijn.

Reminiscenties aan de leer van de indivisibilia vinden we terug bij Kepler (1571—1630), hoewel direct vermeld moet worden, dat hij tegenover deze leer toch een kritische instelling heeft. Bij een van zijn oudere theorieën over de beweging van Mars neemt hij aan, dat Mars een cirkel beschrijft, waarvan het middelpunt M niet samenvalt met de plaats Z, waar de zon zich bevindt (fig. 2). Hij neemt aan,

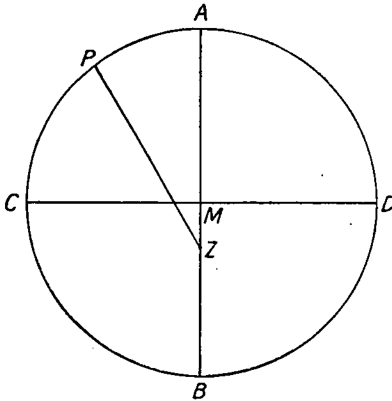


Fig. 2.

dat de baansnelheid van de planeet omgekeerd evenredig is met de afstand PZ van de planeet tot de zon. De tijd, die de planeet nodig heeft voor het doorlopen van een baanelement is dus recht evenredig met de afstand van dit baanelement tot de zon. Hij vraagt nu, hoe de tijd, die de planeet nodig heeft om AP te doorlopen, zich verhoudt tot de omloopstijd. Deze tijden zullen zich verhouden volgens Kepler als de som van de oneindig vele afstanden van Z tot de boog AP en de som van alle afstanden van Z tot de cirkel. Op dit moment zien we de leer van de indivisibilia een rol spelen. Het berekenen van een groot aantal van deze afstanden bleek een dusdanig omvangrijk werk, dat Kepler op het idee kwam verband te zoeken tussen de som van deze afstanden en de doorlopen oppervlakte. Hij vroeg zich dus af, of de gevraagde verhouding niet vervangen mocht worden door die tussen de oppervlakte van ZAP en de oppervlakte van de gehele cirkel. Hij dacht daarbij, naar hij zelf schrijft, aan de afleiding van de oppervlakte van de cirkel door Archimedes, waarbij deze de cirkel verdeelt in een oneindig aantal middelpuntsdriehoeken. Zijn kritische geest constateert echter direct een verschil, de

driehoeken van Archimedes staan rechthoekig op de cirkelomtrek, de zijne niet. Bovendien kan zijn methode niet juist zijn, want ZC + ZD < MC + MD en dus zou de som van de afstanden van Z tot de cirkel groter zijn dan de som van de afstanden van M tot de cirkel, terwijl beide sommen de oppervlakte van de cirkel zouden moeten leveren. Hij wijst hier dus expliciet een fout in de methode door middel van indivisibilia aan. Daarna vindt hij in principe de goede oplossing: Rol de cirkelomtrek op een lijnstuk AA af en richt in elk punt P van dit lijnstuk een loodlijn op gelijk aan de afstand PZ (fig. 3). De oppervlakte van de gearceerde figuur APZZ is nu een

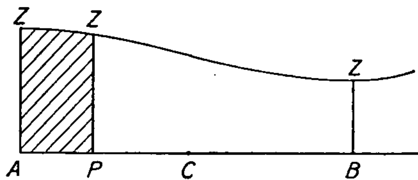


Fig. 3.

maat voor de tijd benodigd voor het doorlopen van boog AP. Daar hij er niet in slaagt op deze wijze het probleem ook numeriek op te lossen, stelt hij zich toch tevreden met de benadering, dat de tijden evenredig met de doorlopen oppervlakten zijn. Dit is de oorsprong van de bekende perkenwet.

We zien, dat de kritiek op de leer der indivisibilia hier geleid heeft tot een methode, die al begint te gelijken op integraalrekening.

De historische volgorde is in het voorgaande onvoldoende in acht genomen. Cavalieri publiceerde zijn methode in 1635, de resultaten van Kepler vindt men in zijn Astronomia Nova, die in 1609 verscheen.

De bepaling van oppervlakten en inhouden met behulp van indivisibilia doet denken aan onze huidige methode met behulp van integraalrekening. Het essentiële verschil is, dat de inhoud niet opgevat wordt als een som van infinitesimale inhouden, maar op de een of andere wijze gereduceerd wordt tot oppervlakten. De volgende stap zal dus moeten zijn een inhoud te bepalen door de som te nemen van een grote hoeveelheid inhouden van zeer kleine deeltjes, die aan de indivisibilia dus doen denken.

Deze stap is o.a. gedaan door Fermat (1601—1665). Fermat beschouwde de grafiek van de functie $y = \frac{a}{x^2}$ $(a > 0)$. Hij koos een willekeurig punt A op de X-as met positieve abscis b en richtte in dit punt een loodlijn AA′ op de X-as op (fig. 4). Hij stelde nu het

probleem de oppervlakte te berekenen van het gebied, dat begrensd wordt door de X-as, de grafiek en de rechte AA'. Daartoe koos hij op de X-as een serie punten B, C, D, . . . met abscissen $b(1+\alpha)$, $b(1+\alpha)^2$, $b(1+\alpha)^3$, . . ., waarin α een willekeurig positief getal is.

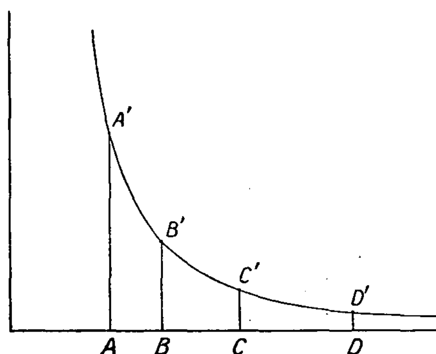


Fig. 4.

In de punten B, C, D, . . . richtte hij loodlijnen BB', CC', DD', . . . op de X-as op. Het gebied wordt daardoor verdeeld in ABB'A', BCC'B', CDD'C', ... Nu is

$$AA' = \frac{a}{b^2},\ BB' = \frac{a}{b^2(1+\alpha)^2},\ CC' = \frac{a}{b^2(1+\alpha)^4}, \ldots.$$

Hieruit volgt

$$AB \cdot AA' = \frac{\alpha a}{b},\ BC : BB' = \frac{\alpha a}{b(1+\alpha)},\ CD \cdot CC' = \frac{\alpha a}{b(1+\alpha)^2}, \ldots.$$

De som van deze meetkundige reeks blijkt $\frac{a(1+\alpha)}{b}$ te zijn. Fermat merkt nu op, dat het mogelijk is de figuren ABB'A', . . . zo klein te kiezen, dat ze als rechthoeken beschouwd kunnen worden door α zo klein te kiezen, als men maar kan. De som wordt dan $\frac{a}{b}$, omdat $\frac{a\alpha}{b}$ „verdwijnt en weggaat in het niets".

Opmerkelijk is in dit slot de gemakkelijke wijze, waarop met het tot 0 naderen van de verschillen tussen de rechthoeken en de figuren ABB'A', . . . wordt omgesprongen. Geometrische evidentie wordt als bewijsmiddel voetstoots aanvaard.

Ook Pascal (1623—1669) heeft zich bezig gehouden met problemen, die de integraalrekening raken. In zijn Traité des sinus du quart de cercle (1659) gaat hij (ten behoeve van zijn zwaartepuntsbepalingen) uit van een cirkelboog BP (fig. 5). Op de boog kiest hij

een aantal punten $D_1, D_2, \ldots, D_n$ zo, dat de bogen $BD_1, D_1D_2, \ldots, D_nP$ aan elkaar gelijk zijn. Hij wil de som uitrekenen van de produkten van D_kD_k' met een boogelement. Hij merkt nu eerst op (fig. 6),

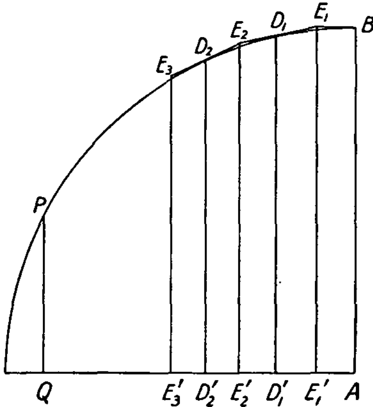


Fig. 5.

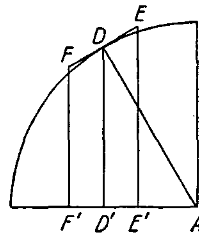


Fig. 6.

dat $DD' \cdot EF = AD \cdot E'F'$. Hieruit volgt, dat de som van alle produkten $D_kD_k' \cdot E_kE_{k+1}$ gelijk is aan het produkt $AD \cdot AQ$. Het aantal bogen, waarin boog BP verdeeld wordt, kiest hij nu onbeperkt groot („indéfini"). Dan is, volgens Pascal, elke raaklijn E_kE_{k+1} gelijk aan een boog D_kD_{k+1}. De som van de produkten van de ordinaten met de bijbehorende bogen is dus gelijk aan het produkt van AQ en de straal.

Merkwaardig is de opmerking, die Pascal na dit bewijst maakt om het te rechtvaardigen. Hij zegt, dat men niet verbaasd moet zijn, dat hij de raaklijnen en de bogen aan elkaar gelijk gesteld heeft. Men weet weliswaar, dat deze gelijkheid niet juist is, als het aantal bogen eindig is, maar niettemin is zij wel juist, als het aantal „indéfini" is. Want dan verschilt de som van alle raaklijnen niet van de totale boog BP, dus van de som van alle bogen D_kD_{k+1}, dan een hoeveelheid, die kleiner is dan elke willekeurige gegeven grootheid („une quantité moindre qu'aucune donnée").

We zien hier niet alleen, dat Pascal een methode toepast, die we als voorloper van een integratie kunnen aanzien, maar dat hij zich bovendien er rekenschap van geeft, dat de fout bij een toenemend aantal deelpunten tot 0 nadert.

We gaan nu over tot de differentiaalrekening. Voorlopig moeten we van elk verband tussen differentiaalrekening en integraalrekening afzien. De differentiaal- en de integraalrekening hebben zich aanvankelijk geheel los van elkaar ontwikkeld. Ook voor de ont-

wikkeling van de differentiaalrekening is het werk van Fermat baanbrekend geweest. Zijn resultaten heeft hij omstreeks 1638 gepubliceerd.

Hij vond allereerst een methode om de extrema van een functie te bepalen. We zullen deze toelichten aan een voorbeeld, dat door Fermat zelf gegeven is. Hij vraagt B in twee delen te verdelen, zo dat het produkt maximaal wordt. We moeten dus het maximum bepalen van

$$A(B-A),$$

opgevat als functie van A. Onderstel nu, dat A de gevraagde waarde is. We kiezen een kleine E en merken op, dat de waarden van $A(B-A)$ voor A en $A+E$ ongeveer aan elkaar gelijk moeten zijn. Daarom stelt hij

$$A(B-A)=(A+E)(B-A-E).$$

Hieruit volgt

$$E(B-2A-E)=0.$$

We delen nu door E (Fermat ziet in, dat dit altijd mogelijk zal zijn) en houden over

$$B-2A-E=0.$$

Nu „stoten we E eruit" en krijgen

$$A=\tfrac{1}{2}B.$$

In moderne notatie komt deze methode erop neer, dat we het extremum van een functie bepalen door A op te lossen uit

$$\left(\frac{F(A+E)-F(A)}{E}\right)_{E=0}=0,$$

hetgeen technisch veel lijkt op ons differentiëren.

Typisch is, dat Fermat gebruik maakt van een grootheid E, die op het moment, dat hij ingevoerd wordt, essentieel $\neq 0$ is en toch later gelijk aan 0 gesteld wordt. We zullen een dergelijke redeneerwijze vaker tegenkomen.

Een tweede probleem, dat door Fermat behandeld wordt, is voor ons eveneens van veel belang: het bepalen van de raaklijn aan een gegeven kromme. De door Descartes en Fermat ontwikkelde analytische meetkunde bewijst hier goede diensten. Deze stelt ons in staat een kromme door een vergelijking voor te stellen, waardoor numerieke methoden kunnen worden toegepast.

De methode van Fermat berust op de volgende grondgedachte.

Gegeven is een kromme met daarop een punt A (fig. 7). Gevraagd wordt de raaklijn in A aan deze kromme te vinden. We kiezen een coördinatenstelsel en trachten nu het snijpunt D van de raaklijn met de X-as te vinden. Daartoe nemen we op de kromme een dicht

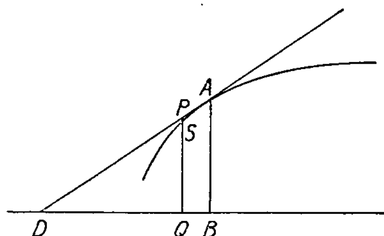


Fig. 7.

bij A gelegen punt S, laten uit A en S de loodlijnen AB en SQ op de X-as neer. Het punt S valt vrijwel samen met het snijpunt P van de rechte SQ met de raaklijn. Nu zijn de driehoeken ABD en PQD gelijkvormig en dus is bij benadering

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{SQ} : \mathrm{QD}.$$

We moeten trachten hieruit BD te vinden. Stel BQ $= E$. Dan is

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{SQ} : (\mathrm{BD} - E). \qquad (1)$$

Hieruit vinden we BD op een soortgelijke manier als bij de bepaling van een extremum.

We willen deze methode toelichten aan een gefantaseerd voorbeeld. We zullen daarbij moderne notatie gebruiken onder handhaving van de voor Fermat typische E.

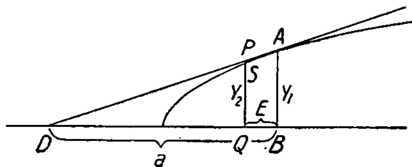


Fig. 8.

Gevraagd wordt de raaklijn te vinden aan de parabool met vergelijking $y^2 = x$ in het punt A met abscis x_1 (fig. 8).

Stel AB $= y_1$, SQ $= y_2$, BD $= a$. Dan is volgens (1)

$$y_1 : a = y_2 : (a - E),$$

$$y_2 = \frac{y_1(a - E)}{a}.$$

Omdat $y_2^2 = x_1 - E$, geldt dan

$$\frac{y_1^2(a-E)^2}{a^2} = x_1 - E,$$

$$y_1^2a^2 - 2y_1^2aE + y_1^2E^2 = x_1a^2 - Ea^2.$$

Omdat A op de parabool ligt en dus $y_1^2 = x_1$, vallen de termen zonder E tegen elkaar weg, zodat we weer door E kunnen delen. We krijgen dan

$$-2y_1^2a + y_1^2E = -a^2.$$

Stellen we hierin weer $E = 0$, dan vinden we het bekende resultaat

$$a = 2y_1^2.$$

Oppervlakkig bezien lijkt de methode erop neer te komen, dat het differentiequotiënt bij benadering gelijk gesteld wordt aan de richtingscoëfficiënt. De toename van y speelt echter in de afleiding nergens een rol, zodat we weliswaar enige analogie, maar toch nog een belangrijk principieel verschil met de methode der differentiaalrekening zien.

Interessant is hiermee de manier te vergelijken, volgens welke Barrow (1630—1677) ditzelfde probleem behandeld zou hebben. In 1664—1666 publiceerde hij een boek, waarin een methode door hem ontwikkeld werd om tangenten aan een gegeven kromme te vinden. We zullen ook deze methode aan de hand van het voorgaande gefantaseerde voorbeeld duidelijk maken.

Gevraagd wordt weer de raaklijn te vinden aan de parabool met vergelijking $y^2 = x$ in het punt A met abscis x_1 (fig. 9).

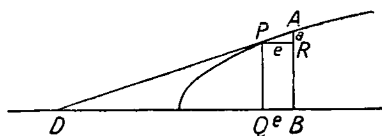


Fig. 9.

Kies op de parabool een stuk AP „van onbegrensde kleinheid". Trek AB en PQ loodrecht op de X-as en PR evenwijdig aan de X-as. Stel AB $= y_1$, AR $= a$ en PR $= e$. De raaklijn AD gaat nu praktisch door P, omdat wegens het oneindig klein zijn van het stuk AP dit als recht beschouwd kan worden. Nu is

$$y_1^2 = x_1,$$
$$(y_1 - a)^2 = x_1 - e,$$

en dus

$$-2ay_1 + a^2 = -e.$$

Nu laten we alle termen hieruit weg, die van de tweede graad in a en e zijn. We houden dan over

$$2ay_1 = e.$$

We hebben nu een betrekking gevonden tussen a en e, dus tussen de lijnstukken AR en PR. In deze betrekking vervangen we e door DB en a door AB (dus door y_1). Zodat we ten slotte vinden

$$2y_1{}^2 = \mathrm{BD}.$$

Het verschil met Fermat is, dat hier de gelijkvormigheid gebruikt wordt van driehoek DBA met de infinitesimale driehoek PRA. We zijn hiermee het begrip differentiaalquotiënt een stap nader gekomen.

De beslissende stap, welke Fermat nog scheidt van de differentiaalrekening, is gedaan door Leibniz (1646—1716). In een brief, die hij in 1676 aan Newton zond, heeft hij zijn denkwijze voor het eerst uiteengezet. Zijn uitgangspunt vertoont veel overeenkomst met dat van Barrow (volgens zijn eigen zeggen heeft hij echter de inspiratie ertoe ontvangen door het lezen van het reeds besproken werk van Pascal). De grondgedachte van zijn methode kunnen we gemakkelijk beschrijven aan de hand van fig. 9. Ook hij beschouwt de twee gelijkvormige driehoeken PRA en DQP, welke hij *karakteristieke driehoeken* noemt. Uit de gelijkvormigheid leidt hij af, dat

$$\mathrm{DQ} : \mathrm{QP} = \mathrm{PR} : \mathrm{RA}.$$

Hij voert nu de ons bekende schrijfwijze

$$\mathrm{PR} = \mathrm{d}x, \ \mathrm{RA} = \mathrm{d}y$$

in. Als men nu de verhouding van $\mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}x$ kent, dan is het mogelijk de subtangens DQ te berekenen.

Essentieel is hierbij weer het optreden van een infinitesimale driehoek en een eindige driehoek, die met elkaar gelijkvormig zijn. Het infinitesimale karakter van de ene driehoek wordt door Leibniz in een latere verhandeling duidelijk weergegeven door te spreken van twee karakteristieke driehoeken, een „aangeefbare" en een „niet aangeefbare" (1694).

Het principieel nieuwe in deze beschouwing is gelegen in de wijze, waarop hij nu verder met de infinitesimale grootheden $\mathrm{d}x$ en $\mathrm{d}y$ gaat rekenen. Zo vinden we in de brief een afleiding van $\mathrm{d}(y^2)$. Deze luidt als volgt:

$$(y + \mathrm{d}y)^2 - y^2 = 2y\,\mathrm{d}y + (\mathrm{d}y)^2.$$

Het kwadraat van de oneindig kleine grootheid $\mathrm{d}y$ kan weggelaten

worden en dus is

$$d(y^2) = 2y\,dy.$$

Verschillende andere formules worden op analoge wijze in de brief afgeleid, zoals

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy.$$

Leibniz heeft deze methode eerst gepubliceerd in 1684 in de Acta Eruditorum in een artikel, waarvan de titel, vertaald in het Duits, luidt: „Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechnungsart". Het merkwaardige van dit artikel is, dat Leibniz het blijkbaar niet aandurft dx en dy als infinitesimale grootheden in te voeren, maar dat het hier eindige grootheden zijn, die zich verhouden als de rechthoekszijden van de infinitesimale karakteristieke driehoek.

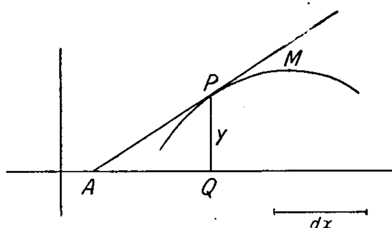


Fig. 10.

Hij gaat uit van een kromme en bepaalt de coördinaten van de punten van deze kromme door middel van een cartesiaans assenkruis. Op deze kromme kiest hij een willekeurig punt P met coördinaten x en y; in P trekt hij de raaklijn aan de kromme en noemt het snijpunt van deze raaklijn met de X-as A (fig. 10). Nu kiest hij een willekeurig lijnstuk en noemt dit dx. Daarna definieert hij een lijnstuk dy volgens

$$PQ : AQ = dy : dx.$$

Hierin zijn dx en dy dus eindige lijnstukken, waarvan de lengte niet klein behoeft te zijn. Enige pagina's later merkt hij echter op, dat er totnogtoe onvoldoende aandacht aan geschonken is, dat „man dy . . . proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d.h. Inkrementen oder Dekrementen, der y . . . betrachten kann". Hij wijst er zelf op, dat de invoering van deze dy het wezenlijk nieuwe van zijn methode is, waardoor deze zich van alle voorgaande onderscheidt.

Leibniz stelt nu een groot aantal rekenregels op, namelijk:

$$\mathrm{d}a = 0 \quad (a \text{ constant}), \quad \mathrm{d}(ax) = a\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}\frac{v}{y} = \frac{v\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}v}{y^2},\ ^{1)}$$

$$\mathrm{d}(xv) = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}\frac{1}{x^a} = -\frac{a\,\mathrm{d}x}{x^{a+1}},$$

$$\mathrm{d}\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(z - y + w + x) = \mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{a\,\mathrm{d}x}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Hij geeft van deze formules in het bedoelde artikel geen bewijzen. Deze rekenwijze geeft hij de naam *differentiaalrekening*; de grootheden dx, dy, . . . noemt hij *differentialen.*

Hij wijst er nu op, dat indien de ordinaten toenemen, dy positief is, en indien de ordinaten afnemen, negatief. Hiermee hangt samen, dat de raaklijn (in onze figuur) naar rechts boven resp. naar rechts beneden loopt. In het „tussenpunt" M geldt echter geen van beide, daar neemt y noch toe, noch af, maar is „im Stillstand begriffen". Hier moet dus dy gelijk aan 0 zijn. Zo vindt hij, dat dy = 0 de voorwaarde voor een uiterste waarde is. Hij merkt verder op, dat ingeval dy in verhouding tot dx oneindig groot is, de raaklijn loodrecht op de X-as staat. Is dd$y$, d.i. de differentie van de differentie, positief, dan keert de kromme zijn convexe zijde naar de X-as toe, is dd$y$ negatief, dan zijn concave zijde. Is dy maximaal of minimaal (dus als dd$y$ = 0), dan heeft de kromme een buigpunt en worden convexheid en concaafheid verwisseld, ten minste als niet tegelijkertijd dy = 0 is. (Leibniz maakt hier blijkbaar een fout.) Duidelijk is, dat deze rekenwijze praktisch dezelfde is als de onze, als we door middel van differentiaalrekening de eigenschappen van de grafiek van een functie willen vinden.

Ook het probleem aan een gegeven kromme een tangent in een gegeven punt te vinden lost Leibniz zonder veel moeite op. Hij merkt daarbij eerst op, dat een raaklijn vinden hetzelfde wil zeggen als een rechte vinden, die twee punten van de kromme met oneindig kleine afstand verbindt. Zijn methode geven we weer aan de hand van een gefantaseerd voorbeeld: vind de raaklijn aan de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ in het punt (x, y). De regels van de differentiaalrekening geven

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

[1]) Leibniz schrijft voor deze formule nog een ±-teken, dat we eenvoudigheidshalve weggelaten hebben.

Hieruit volgt, dat de ordinaat y en de gevraagde subtangens zich verhouden als x en y, waarbij het minteken erop wijst, dat de raaklijn naar rechts beneden loopt (x en y zijn hierbij positief ondersteld).

Het wonderlijke van dit hele betoog is, dat het tot correcte resultaten leidt en formeel parallel loopt met de heden gangbare berekeningswijzen, terwijl het anderzijds nauwelijks te begrijpen is. De differentialen zijn hier bij Leibniz officieel heel normale eindige grootheden, die echter evenredig zijn met infinitesimale toenamen. Enerzijds vermeldt hij deze infinitesimale toenamen slechts terloops en eerst nadat hij zijn gehele formularium al opgesteld heeft, anderzijds zijn het juist de grootheden, waar het hele betoog om draait.

We doen dan ook het verstandigste deze eindige differentialen niet al te zeer au sérieux te nemen. Ze komen bij Leibniz verder nergens voor en zijn vermoedelijk hier alleen ter wille van de „duidelijkheid" ingevoerd. Zowel in de brief aan Newton als in zijn latere publikaties is er geen sprake meer van.

Leibniz heeft zich niet alleen met de differentiaal-, doch ook met de integraalrekening bezig gehouden en heeft het verband tussen beide rekenwijzen ingezien. In 1675 gebruikt hij voor het eerst het moderne integraalteken, waarvan we de betekenis het best kunnen weergeven met „som van alle". Hij ziet reeds in, dat differentiëren en integreren in zekere zin inverse bewerkingen zijn, want hij schrijft: „Zoals namelijk $\int$ de afmetingen vermeerdert, vermindert d ze. $\int$ betekent echter som, d verschil." (uit gedateerde papieren, waarop hij zijn wiskundige onderzoekingen schreef van 29 okt. 1675). Later heeft hij deze gedachten gepubliceerd. In 1686 schrijft hij in de A.E. in een artikel getiteld „Geometria recondita": Uit een differentiaalvergelijking ontstaat een sommerende vergelijking. Zo is $\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$ een gevolg ervan, dat $d(\frac{1}{2}x^2) = x\, dx$. (Men ziet, dat dx hier kennelijk weer een infinitesimale grootheid is.)

In een artikel in de A.E. van 1693 vinden we deze gedachten nader uitgewerkt. We zullen zijn uiteenzettingen weergeven aan de hand van fig. 11, die op de keuze der letters na met de oorspronkelijke overeenstemt. In de figuur is sprake van twee curven, een getrokken en een gestippelde curve. De ordinaten van de punten van deze krommen zijn resp. y en z genoemd; zowel y als z moeten we positief denken. De gestippelde kromme is de oorspronkelijke, de getrokken wordt erbij geconstrueerd volgens het volgende voorschrift: PQ en QE verhouden zich als AC tot een constant lijnstuk a. (Het constante lijnstuk a heeft hier geen andere functie dan het homogeen maken van de betrekking. Men achtte dat in deze tijd nodig. Tegenwoordig zou men voor a de lengte-eenheid nemen.) Hieruit volgt,

wegens de gelijkvormigheid van de beide karakteristieke driehoeken EQP en EGF:

$$dy : dx = AC : a,$$
$$a\,dy = z\,dx.$$

Dus is

$$a\,dy = \text{opp. ACDB},$$
$$ay = \int z\,dx = \text{opp. OCA.}$$ [1])

De getrokken lijn is dus de kwadrerende van de gestippelde lijn, want de ordinaat y is evenredig met de oppervlakte van OCA.

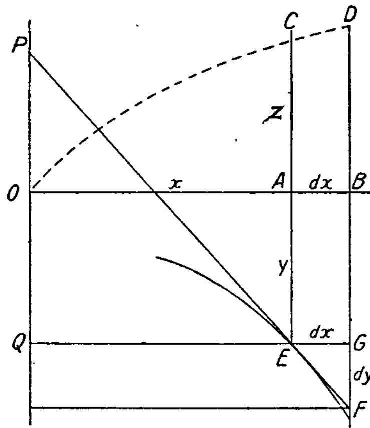


Fig. 11.

Stellen we $a = 1$, dan zien we hier duidelijk integreren en differentiëren als inverse bewerkingen. Differentiëren we y naar x, dan krijgen we z, en integreren we z naar x, dan krijgen we y.

De interpretatie van het artikel van Leibniz in de vorige alinea is ongetwijfeld een moderne. Hij kwalificeert zijn betoog zelf als een algemene methode om het probleem van de kwadratuur te reduceren tot het geven van een lijn, die een gegeven „Neigungsgesetz" geeft. In plaats van „Neigungsgesetz" gebruikt hij ook wel de term „differentiaalvergelijking".

Leibniz heeft verschillende malen gepoogd toe te lichten, wat de achtergrond is van zijn in de differentiaalrekening gebruikte rekenwijze. In het bijzonder heeft hij getracht uit te leggen, wat verstaan moest worden onder het quotiënt van twee oneindig kleine grootheden. Hij poogt dit te verduidelijken aan de hand van het volgende voorbeeld (1702). In fig. 12 is AE $= x$, AB $= y$, CE $= c$

[1]) Blijkbaar neemt Leibniz stilzwijgend aan, dat $y = 0$, als $x = 0$.

en DE $= e$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en EDC volgt dan $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$. We verplaatsen nu de rechte BD parallel naar rechts, totdat D in E gekomen is. De evenredigheid blijft dan steeds

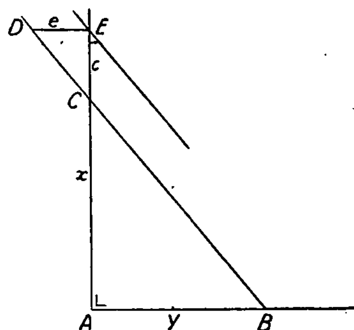


Fig. 12.

juist. Is D in E aangekomen, dan is het eerste lid van de evenredigheid overgegaan in $\frac{x}{y}$, hetgeen dan nog steeds gelijk is aan de breuk $\frac{c}{e}$, hoewel nu teller en noemer van deze breuk gelijk aan 0 geworden zijn. We maken hierbij gebruik van de zg. continuïteitswet, volgens welke gelijkheid een bijzonder geval van ongelijkheid, rust een bijzonder geval van beweging, e.d. is. De ongelijkheid van twee grootheden is op het punt te verdwijnen, als gelijkheid optreedt, de beweging op het punt op te houden, als rust optreedt. Zo ook hier: de grootheden c en e zijn op het punt 0 te worden, maar behouden daarbij toch hun onveranderlijk quotiënt. Is iemand hiermee niet tevreden, dan zou men hem kunnen bewijzen (op dezelfde wijze als Archimedes dat doet), dat de fout, die hij maakt, niet aan te geven is.

Over het oneindig-kleine schrijft hij in 1702 aan Varignon, dat het geenszins zijn bedoeling is de metafysische aanname te maken, dat er een actueel oneindig klein zou bestaan in de natuur. Het oneindig kleine moet slechts opgevat worden als het onvergelijkbaar kleine, zoals een deeltje magnetische materie onvergelijkbaar klein is t.o.v. een zandkorrel, een zandkorrel t.o.v. de aarde, de aarde t.o.v. het firmament. De oneindig kleine grootheden moeten niet opgevat worden als constanten, maar kunnen willekeurig klein gekozen worden. Het gevolg daarvan is, dat in de berekeningen geen fouten gemaakt worden, omdat we kunnen aantonen, dat het in onze macht ligt een eventuele fout kleiner te maken dan elke aangeefbare

grootte door het onvergelijkbaar kleine maar voldoende klein te kiezen.

Men denkt hier een ogenblik, dat Leibniz het essentiële van zijn methode begint te doorzien. Even later zegt hij echter in dezelfde brief, dat men oneindig kleine dingen, al kent men ze geen realiteit toe, zonder bezwaar als ideale grootheden kan gebruiken, waardoor het rekenproces bekort wordt, op dezelfde manier als men met imaginaire getallen, zoals $\sqrt{-2}$, rekent.

We kunnen uit deze toelichtingen moeilijk meer concluderen dan dat Leibniz met zekerheid inzag, dat zijn rekenmethode exact juist was, maar dat hij niet in staat was van deze juistheid een motivering te vinden, die de toets der kritiek kan weerstaan.

Gelijktijdig met Leibniz en onafhankelijk van hem heeft ook Newton (1643—1727) zich bezig gehouden met de differentiaal- en integraalrekening. Zijn eerste onderzoekingen dateren uit de jaren 1665 en 1666.

In 1669 verschijnt van zijn hand De analysi per aequationes. Hij stelt hier het volgende probleem. Gegeven is (fig. 13), op welke

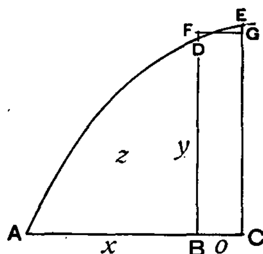


Fig. 13.

wijze de oppervlakte z van de figuur ADB van x afhangt. Gevraagd, op welke wijze de ordinaat y van D van x afhangt. Hij laat nu x een kleine toename BC $= o$ ondergaan. De oppervlakte z neemt daardoor toe met de oppervlakte BDEC. Deze figuur vervangt hij door het even grote rechthoekje BFGC. De toename van z is dan gelijk aan $o \cdot$ BF, of, wat op hetzelfde neerkomt, aan oy. Onderstel nu, dat

$$z = cx^{\frac{p}{q}}.$$

Dan is

$$z + oy = c(x + o)^{\frac{p}{q}},$$

$$(z + oy)^q = c^q(x + o)^p,$$

$$z^q + qz^{q-1}oy + \ldots = c^q x^p + c^q p x^{p-1} o + \ldots.$$

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

INHOUD VAN DE 35STE JAARGANG

ARTIKELEN.

LEZINGEN EN VOORDRACHTEN.

RAPPORTEN EN VERSLAGEN.

DIVERSEN.

BESPREKING EN AANKONDIGING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN.

Besproken boeken:

Besproken tijdschrift:

BERICHTEN.

Diverse berichten

De 35e jaargang stond onder redactie van Dr. JOH. H. WANSINK, A. M. KOLDIJK, Dr. W. A. M. BURGERS, H. W. LENSTRA, Dr. D. N. VAN DER NEUT, Dr. H. TURKSTRA en Dr. P. G. J. VREDENDUIN.

Hieruit vinden we weer op de bekende manier, door gebruik te maken van $z^q = c^q x^p$, daarna door o te delen en de termen, die nu nog een factor o bevatten, weg te laten, dat

$$qz^{q-1}y = c^q p x^{p-1},$$

of, na enige herleiding,

$$y = c\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

(Het voorbeeld is oorspronkelijk; alleen de coëfficiënten zijn iets eenvoudiger gekozen.)

In feite komt dit voorbeeld erop neer, dat Newton laat zien, dat door differentiatie van de oppervlaktefunctie de oorspronkelijke functie verkregen wordt.

Hij gebruikte dezelfde rekenwijze ook om, als gegeven is, hoe y van x afhangt, z te berekenen. Van het begin af zijn integreren en differentiëren voor Newton dus inverse bewerkingen geweest.

Merkwaardig is de gedachte, welke Newtons berekeningen begeleidt. In fig. 14 zien we, hoe hij naast de oppervlakte ADB nog een

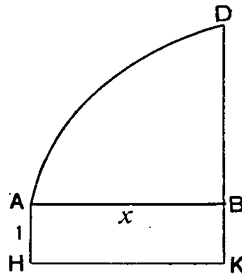


Fig. 14.

rechthoek AHKB getekend heeft. De rechthoekszijde AH van deze rechthoek is de lengte-eenheid; de oppervlakte van AHKB is dus gelijk aan x. Nu kan men de beide oppervlakten ADB en AHKB ontstaan denken door verplaatsing naar rechts van KBD, waarbij BK voordurend gelijk blijft aan de eenheid en de lengte van BD variabel is. Dan zijn BD en BK een maat voor de snelheid, waarmee de oppervlakten van AHKB resp. ADB toenemen. Newton noemt BK en BD *momenten* en wel is BK = 1 het moment, volgens welk AHKB = x toeneemt, en BD = y het moment, volgens welk ADB toeneemt. De verhouding van BD en BK geeft dus aan, hoeveel keer zo snel ADB toeneemt als AHKB. (In de terminologie van Leibniz zouden we zeggen, dat $dz : dx = y : 1$.)

Hij past nu dezelfde grondgedachte, het vergelijken van de snel-

heden, waarmee twee grootheden toenemen, toe op de bepaling van de lengte van een cirkelboog. Hij vraagt de lengte van de cirkelboog AD (fig. 15) te berekenen, als gegeven is AE = 1 en AB = x. We zien gemakkelijk in, dat

$$BK : DH = DG : DH = TB : TD = BD : DC = \sqrt{(x - x^2)} : \tfrac{1}{2}.$$

Het verdere verloop van de berekening komt neer op een integratie. De rekenregels daarvoor waren Newton tot zekere hoogte bekend (vgl. het vorige voorbeeld). De wortelvorm leverde natuurlijk wel moeilijkheden, maar deze wist Newton te overwinnen door reeksontwikkeling, welke reeks dan term voor term geïntegreerd werd.

De overeenkomst met het voorgaande zien we, als we bedenken, dat hier BK en DH de momenten zijn en dat hun verhouding dus weergeeft, hoeveel maal zo snel de boog toeneemt als zijn projectie op de middellijn.

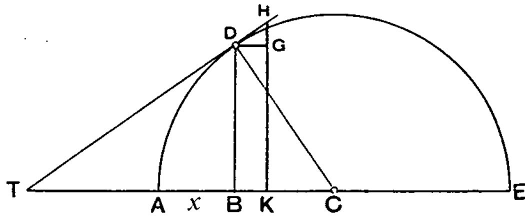


Fig. 15.

Om de eenheid tussen het rectificeren van krommen, het berekenen van oppervlakten en van inhouden duidelijk te maken, zegt hij, dat de eenheid van het moment een oppervlak is als het om inhoudsbepalingen gaat, een lijnstuk als het om oppervlaktebepalingen gaat, en een punt als het om lengtebepalingen gaat. Hij voegt hieraan toe, dat hij er niet voor terugdeinst over punten of oneindig kleine lijnstukken als eenheden te spreken.

In 1671 werkt Newton zijn ideeën nader uit in zijn Methodus fluxionum. Hij gaat nu uit van de grondgedachte, dat mathematische grootheden niet uit kleinste deeltjes samengesteld zijn, maar ontstaan gedacht kunnen worden door een vloeiende beweging. Zo ontstaat door vloeiende beweging van een punt een lijn, door vloeiende beweging van een lijn een oppervlak en door vloeiende beweging hiervan een lichaam. Hij beroept zich er hierbij op, dat men dit in de natuur ook werkelijk kan zien gebeuren.

Vloeiende grootheden noemt Newton *fluentes*. Hoe groot een grootheid, die aan het aangroeien is, in een bepaald tijdsverloop wordt, hangt af van de snelheid, waarmee de grootheid aangroeit.

Deze snelheid van aangroeiing noemt Newton de *fluxie*. De fluxie van een fluens x noteert hij $\dot{x}$. De aangroeiing van x in een oneindig klein tijdsdeeltje o is dan $\dot{x}o$. Deze aangroeiingen nemen de functie over van de enigszins duistere momenten uit De analysi per aequationes. Ze hebben dezelfde dimensie als de fluentes en niet meer, zoals de momenten, een dimensie, die 1 lager is. Men zou dit kunnen interpreteren als een duidelijk zich afkeren van de leer der indivisibilia.

Newton gebruikt zijn fluxierekening voor problemen als: de afgelegde weg is op ieder tijdstip bekend, leid hieruit de snelheid af, en: de snelheid is op ieder tijdstip bekend, leid hieruit de afgelegde weg af. De fluentes kunnen dus zowel mathematische als mechanische grootheden zijn.

Op dezelfde wijze als in De analysi per aequationes wordt afgeleid, dat uit $y = x^n$ volgt $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. Men ziet, dat de hulpgrootheid tijd, die aan de fluxierekening ten grondslag ligt, in het resultaat geen rol speelt (een opmerking, die niet van Newton afkomstig is).

Uit betrekkingen tussen fluentes x en y leidt hij betrekkingen tussen hun fluxies af. Is b.v. gegeven

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0,$$

dan vindt hij als betrekking tussen de fluxies

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Gebroken vormen en wortelvormen kan hij behandelen door het invoeren van nieuwe onbekenden. Zo zal hij in

$$\frac{1}{x+a} + \sqrt{xy} = 0$$

stellen

$$\frac{1}{x+a} = z \text{ en } \sqrt{xy} = u.$$

Hieruit volgt dan

$$xz + az = 1 \quad \text{en} \quad xy = u^2,$$

en dus

$$x\dot{z} + z\dot{x} + a\dot{z} = 0 \quad \text{en} \quad x\dot{y} + y\dot{x} = 2u\dot{u}.$$

Bovendien levert de oorspronkelijke vergelijking

$$\dot{z} + \dot{u} = 0.$$

Door eliminatie van z, u, $\dot{z}$ en $\dot{u}$ vindt men de gevraagde betrekking tussen x, y, $\dot{x}$ en $\dot{y}$.

De omgekeerde bewerking biedt meer moeilijkheden. Newton weet ook hier de moeilijkheden te overwinnen door middel van de methode van de onbepaalde coëfficiënten, die we aan de hand van een voorbeeld zullen duidelijk maken. Het gaat hierbij om, wat wij zouden noemen de integratie van een differentiaalvergelijking van het type $y' = f(x, y)$. Gegeven is

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y.$$

We stellen nu

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots.$$

Dan moet

$$A_1 + 2A_2x + \ldots = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y,$$

of, als we hierin voor y de bovengenoemde machtreeks invullen,

$$A_1 + 2A_2x + \ldots = 2 + 3x - 2(A_0 + A_1x + \ldots) + \\ + x^2 + x^2(A_0 + A_1x + \ldots).$$

Door gelijkstellen van de overeenkomstige coëfficiënten in beide leden lossen we hieruit $A_0, A_1, A_2, \ldots$ op.

Een moeilijkheid is hierbij nog een eventuele term van de vorm $\frac{1}{x}$. Uit deze impasse redt Newton zich door de term te vervangen door $\frac{1}{x+b}$, dit in een reeks te ontwikkelen, daarna term voor term te integreren en ten slotte in de uitkomst x weer door $x - b$ te vervangen.

De fluxierekening levert een eenvoudig hulpmiddel voor het bepalen van extrema en voor het vinden van tangenten. Als een grootheid y extreem is, is het niet mogelijk, dat hij bezig is toe of af te nemen. Dus kan $\dot{y}$ niet positief en ook niet negatief zijn. In een extremum moet $\dot{y}$ dus gelijk aan 0 zijn. Het probleem van de tangent wordt op de ons reeds bekende manier opgelost. De ordinaat van het punt, waarin we de raaklijn willen trekken, en de subtangent verhouden zich weer als de momenten van y en x, dus als de fluxies $\dot{y}$ en $\dot{x}$. Ook hier is dus sprake van het werken met karakteristieke driehoeken, echter zonder dat deze term gebruikt wordt.

Newton geeft in zijn Principia (1687) beschouwingen over de grondslagen van de infinitesimaalrekening, die veel beter doordacht zijn dan die van Leibniz. Hij baseert zijn uiteenzettingen op het begrip „eerste en laatste verhoudingen", hetgeen overeenkomt met ons begrip „limiet van een verhouding". Hij leidt hierover een aantal lemmata af, waarvan we er vier zullen bespreken.

Lemma I. Grootheden en ook verhoudingen van grootheden, die in een eindig tijdsverloop naar gelijkheid streven en die voor het einde van dat tijdsverloop dichter tot elkaar naderen dan een gegeven bedrag, worden ten slotte gelijk.

Bewijs. Als de grootheden (of de verhoudingen) ten slotte ongelijk zijn en een verschil v hebben, dan kunnen zij nooit dichter tot elkaar naderen dan v, hetgeen in strijd is met de onderstelling.

Lemma II. Als in fig. 16 het aantal parallellogrammen tot in het oneindige vermeerderd wordt, dan is de laatste verhouding van de ingeschreven, de omgeschreven en de kromlijnige figuur gelijk aan de eenheid.

Bewijs. Het verschil van de in- en de omgeschreven figuur bestaat uit de gearceerde parallellogrammen. De som hiervan is gelijk aan het parallellogram ABQP. Dit wordt, als AB tot in het oneindige afneemt, kleiner dan een willekeurig bedrag. Volgens lemma I worden dan de in- en de omgeschreven figuur en dus ook de kromlijnige figuur, die daartussen ligt, ten slotte gelijk.

Lemma VI. Als in fig. 17 B langs de kromme tot A nadert, dan nadert de hoek BAD tussen de koorde AB en de raaklijn in A tot 0. Ondersteld is daarbij, dat A in een vloeiend gebogen stuk van de kromme ligt.

Bewijs. Indien deze hoek niet 0 werd, dan zou boog AB met raaklijn AD een hoek insluiten, die gelijk was aan een rechtlijnige hoek en zou de kromme in het punt A dus niet vloeiend gebogen zijn.

(Door het ontbreken van een definitie van een raaklijn komt Newton hier tot een redenering, die weinig steek houdt.)

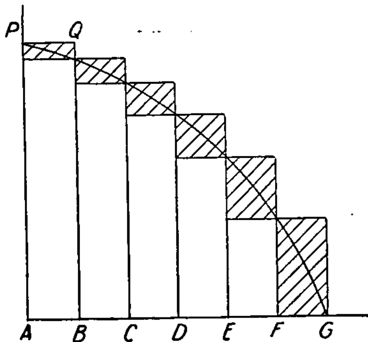


Fig. 16.

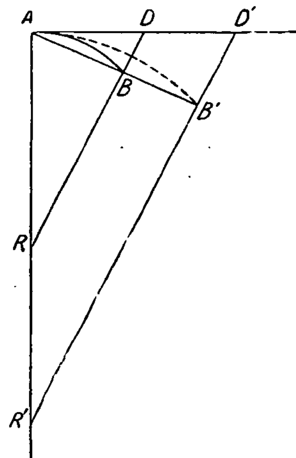


Fig. 17.

Lemma VII. Als in fig. 17 de rechte RD evenwijdig naar A verschoven wordt, dan is de laatste verhouding van de koorde AB, de boog AB en de raaklijn AD gelijk aan de eenheid.

Bewijs. Trek de vaste rechte D'B'R' evenwijdig aan DBR. Teken verder de boog AB', die gelijkvormig met boog AB is. Nu is de verhouding van koorde AB, boog AB en raaklijn AD gelijk aan de verhouding van AB', boog AB' en AD'. Als nu B met A samenvalt, zal volgens lemma VI hoek BAD verdwijnen en dus AB', boog AB' en AD' samenvallen. Hieruit volgt de juistheid van het lemma.

Laten we lemma VI buiten beschouwing, dan zien we hier reeds een serie lemmata, die een duidelijke voorbereiding vormen voor een latere strenge theorie. Het limietbegrip wordt hier voorbereid en er wordt rekenschap gegeven (in lemma II) van het tot 0 naderen van de som van de fouten, die ontstaan bij een infinitesimale benadering.

Newton begrijpt, dat zijn begrip „verhouding van verdwijnende grootheden" niet zonder meer geaccepteerd zal worden en vindt het dus noodzakelijk een toelichting te geven om eventuele kritiek het hoofd te bieden. Hij zegt: „Een tegenwerping is, dat geen verhouding van verdwijnende grootheden de laatste is; immers een verhouding is, voordat de grootheden verdwenen zijn, niet de laatste; zijn de grootheden verdwenen, dan is er geen verhouding meer .... Onder de laatste verhouding der verdwijnende grootheden moet verstaan worden de verhouding der grootheden, niet voordat zij verdwijnen en niet daarna, maar de verhouding, waarmee zij verdwijnen. Evenzo is de verhouding van ontstaande grootheden de verhouding, waarmee zij ontstaan .... Er bestaat een grens, die de snelheid aan het eind der beweging bereiken kan, echter niet overschrijden. Dit is de eindsnelheid. En evenzo is het met het begrip van de limiet van de grootheden en van de verhoudingen van alle beginnende en eindigende grootheden. Daar deze grens bestaat en bepaald is, is het een wiskundig vraagstuk hem te vinden .... De laatste verhoudingen, waarmee de grootheden verdwijnen, zijn niet de verhoudingen der laatste grootheden, maar de limieten, tot welke de verhoudingen der zonder grens afnemende grootheden voortdurend naderen en tot welke zij dichter kunnen naderen dan een gegeven verschil, maar die zij nooit overschrijden en ook niet bereiken, voordat de grootheden tot in het oneindige afnemen. De zaak zal duidelijker worden begrepen bij de oneindig grote grootheden. Indien twee grootheden, waarvan het verschil gegeven is, tot in het oneindige toenemen, dan zal hun laatste verhouding ... de gelijkheidsverhouding zijn, maar daarmee zijn nog niet de laatste of grootste grootheden bepaald, waarvan dat de verhouding is. Der-

halve, indien ik in het volgende ter wille van een gemakkelijke opvatting der zaken spreek van zo klein mogelijke grootheden, of laatste, dan denke men eraan, dat geen grootheden bedoeld worden met bepaalde grootte, maar grootheden, die zonder grens afnemen.''

We merken op, dat het Newtonse limietbegrip in zoverre principieel van het moderne afwijkt, dat hij onder limieten grenswaarden verstaat, die van één bepaalde kant benaderd worden.

We willen het historische resumé hiermee beëindigen. Tot slot volgt hier nog een opsomming van moeilijkheden, die niet of slechts onvolkomen opgelost bleven.

a. Er wordt in de berekeningen veelal gewerkt met een grootheid E (of e of o), die op het moment, dat hij ingevoerd wordt, ongelijk aan 0 ondersteld wordt, echter later in de berekening 0 gesteld wordt. (Dit is door Berkeley in 1714 in zijn kritiek speciaal naar voren gebracht.)

b. Men werkt met benaderingen, maar maakt desondanks geen fout. Hoe is te verklaren, dat het resultaat exact juist is? Heffen de gemaakte fouten elkaar misschien op?

c. Wat is oneindig klein? Is het een fictie?

d. Wat moet verstaan worden onder oneindig klein van hogere orde, zoals voorkomt bij de door Leibniz ingevoerde grootheden ddx, dddx, enz. en de door Newton ingevoerde fluxies van fluxies, enz.?

e. Wat is een grenswaarde precies? Wat moet verstaan worden onder de limiet van een quotiënt van twee grootheden, die allebei gelijk aan 0 worden?

f. Hoe is de structuur van het continuum van reële getallen?

Deze laatste vraag is de belangrijkste. Zonder een helder inzicht in de getalstructuur is het b.v. niet mogelijk stellingen te bewijzen omtrent de existentie van limieten, zoals de stelling, dat elke fundamentaalrij een limiet heeft, en de stelling van de bovenste grens. En bovendien vervalt men door een onvoldoende begrip van het getallencontinuum steeds weer in het representeren hiervan door een aanschouwelijk geometrisch continuum. Juist hierdoor ontstaat het optreden van schakels in bewijsvoeringen, die een voldoende fundament missen.

Het laat zich dan ook horen, dat men er niet in geslaagd is een goede fundering van de infinitesimaalrekening te vinden, voordat men beschikte over een strenge theorie van het reële getal. De gehele 18e eeuw heeft men met slechts weinig succes met het probleem van

de rechtvaardiging van de infinitesimale methode geworsteld. Eerst toen in de 19e eeuw door onderzoekingen van met name Dedekind en Cauchy het inzicht in de structuur van het getallencontinuum doorbrak, kon men ook op het gebied van de differentiaal- en integraalrekening snelle vorderingen maken.

Mogelijk wordt het, als we ons realiseren, welke worsteling in de historie nodig geweest is om tot klaarheid te komen omtrent de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening, voor velen van ons duidelijker, hoe het komt, dat deze voor onze leerlingen zo uitermate moeilijk zijn.

BOEKBESPREKING

Erner en Rosskopf, *Logic in Elementary Mathematics;* uitgever: McGraw-Hill Londen 1959, 270 blz. prijs 52s6d.

Het voornaamste doel van de schrijvers is een studie-methode van de symbolische logica aan te bieden, die toegankelijk is voor hen, die slechts een elementaire wiskundige scholing bezitten.

De schrijvers gaan uitvoerig in op de „vertaling" van de negatie $\bar{A}$ van A. Vele voorbeelden van „goede en slechte vertalingen" worden besproken. Daarna komen de disjunctie, conjunctie en implicatie aan bod, waarna meer gecompliceerde oordelen kunnen besproken worden. Hierna worden de gevormde oordelen onderzocht op juistheid en onjuistheid m.b.v. de waarheidswaarden 0 en 1 (F en T).

In hoofdstuk 4 wordt een „miniatuur meetkunde" gemodelleerd, met de ongedefinieerde, polaire begrippen: goo (lees punt) en oog (lees lijn). Hiermede wordt dan m.b.v. een zestal axioma's en enige definities, ongehinderd door intuïtieve kennis, een meetkunde opgebouwd.

Verder worden ook de algebra en de groepentheorie aan een onderzoek onderworpen. In wezen een geschikt boek om in de hoogste klassen, althans gedeeltelijk, te gebruiken. Maar wie zal daarvoor de tijd durven benutten?

Een keurig verzorgde uitgave. Burgers

A. van Dop en A. van Haselen, *Stereometrie;* 6e druk, Uitg. J. Wolters, Groningen, 1959, 180 blz., *f* 3.75.

Deze zesde druk is geheel aangepast aan het nieuwe wiskundeprogramma, zodat de scheve projectie uitvoerig wordt toegelicht. Na de traditionele inhoudsbehandeling (waarom gaat men niet uit van het viervlak?) worden enkele inhouden met integralen berekend. Een boek, dat zijn bruikbaarheid reeds bewezen heeft.

Burgers

E. M. Hemmerling, *Mathematical Analysis;* McGraw-Hill Londen, 1959, 300 blz., prijs 45s.

Dit prachtig uitgevoerde boek behandelt praktisch de wiskunde, voorzover deze op onze middelbare scholen wordt onderwezen, met dit verschil, dat bij het bespreken van de oplossingsmethoden van *n* vergelijkingen met *n* onbekenden, determinanten worden gebruikt.

De goniometrische functies worden op de gewone wijze ingevoerd, waarbij de hoeken in radialen worden gemeten.

De theorie van de rijen en reeksen wordt uitvoeriger besproken, als bij ons onderwijs de gewoonte is.

Met de eerste beginselen van de differentiaalrekening wordt het boek besloten.

Burgers

Dr. Arnold Baur, Hans Lode und Arno Albrecht: *Anschauliche Mathematik*, I. Teil: Geometrie. Herausgegeben von Dr. K. M. Hoffmann, mit einem Geleitwort von Prof. Dr. H. Behnke. Verlag Ferdinand Hirt, Kiel, 1958, 256 Seiten, D.M. 14.80.

Aanleiding tot het schrijven van dit boek waren de discussies op een in 1956 gehouden congres van wiskunde-leraren in Sleeswijk-Holstein. Daar was de vernieuwing van het wiskundeonderwijs aan de orde, in 't bijzonder de behandeling van begrippen als: vector, groep en afbeelding, nieuwe keuze van onderwerpen en bezinning op de grondslagen der wiskunde. In een beschouwend voorwoord zegt Dr. Hoffmann, dat we thans ingrijpende wijzigingen van de voorstellingen over de mens en zijn plaats in de kosmos meemaken, waardoor de traditionele opvattingen over onderwijs en opvoeding niet meer kloppen. Ook het wiskunde-onderwijs van de vorige eeuw, hoofdzakelijk van de natuur uitgaande, past niet meer in deze tijd. In onze cultuur staat voor het eerst in het middelpunt: de mens. Het is, volgens Dr. Hoffmann, ook niet meer voldoende ons onderwijs vaktechnisch juist te geven, we moeten door ons onderwijs werken aan de vorming van geest en karakter. Daarna behandelt dit boek dan enkele onderwerpen, die men in de hoogste twee klassen van de middelbare school zou kunnen behandelen, nadat de leerlingen al in de analytische meetkunde met vectoren hebben leren werken (voor deel 1) en al op de hoogte zijn met differentiaal- en integraalrekening (voor deel 2).

Deel 1, dat meer dan de helft van het boek beslaat, is gewijd aan de meetkundige verwantschappen. Bauer behandelt hierin uitvoerig de groep der kongruentietransformaties (translatie, rotatie en spiegeling), de gelijkvormigheids-transformaties en de affiene transformaties, zowel in het platte vlak als in de driedimensionale ruimte. De projectieve verwantschappen zullen in een andere studie aan de orde komen. Er wordt gebruik gemaakt van de vectorschrijfwijze, maar nagenoeg niet van afkortingen (om didaktische redenen?), waardoor de notatie vaak wel omslachtig is.

Deel 2 van Lode geeft de behandeling van de differentiaal-meetkunde van vlakke en ruimte-krommen, tot en met kromming en torsie, osculatievlak en formules van Frenet.

Deel 3 vereist minder voorkennis, nl. alleen die der vlakke meetkunde. Het bevat een zeer interessante inleiding tot de niet-euclidische meetkunde, uitgaande van het raakprobleem van Apollonius over de cirkels, die aan drie gegeven cirkels raken. Van dit probleem geeft Albrecht eerst de oplossing door middel van cirkelbundels, daarna wordt het bijzondere geval, dat de gegeven cirkels door één punt gaan, met inversie behandeld. De verkregen figuur wordt gebruikt om een model van de euclidische meetkunde te ontdekken (het parabolische cirkelnet). Daarna geven de hyperbolische en de elliptische cirkelnetten modellen voor de beide niet-euclidische meetkunden. (Wellsteinsche Modelle.)

Men zal zich er toch wel even over verbazen, dat dit alles voor de middelbare scholen is bestemd, al is dit boek dan ook bedoeld als een poging om de mogelijke stof enigszins af te bakenen, niet als eindresultaat, maar meer als beginpunt voor verdere discussie. Wel moet men er natuurlijk rekening mee houden, dat de hoogste klas van een naturwissenschaftliches-mathematisches Gymnasium niet gelijk te stellen is met onze hoogste klas; de leerlingen zijn ouder en meer gespeci-

aliseerd. Volgens het voorwoord zou zelfs het tweede deel voor de Ober- en Unterprima niet te moeilijk zijn. Voor onze scholen gaan deel 1 en 2 zeker veel te ver. Daar echter ook in ons land het vraagstuk van de modernisering van de leerstof een punt van bespreking is, is het van belang van dit boek kennis te nemen.

Troelstra

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

LEDENVERGADERING OP WOENSDAG 31 AUGUSTUS 1960 OM 14.30 UUR IN HET EYKMANHUIS TE DRIEBERGEN.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 7 van 16 oktober 1959 en in Euclides nr. IV van 15 december 1959.)
3. Voordracht van *Dr. J. W. Dekker*, Groningen, over: *Het „bewijs door volledige inductie"*.
4. Pauze.
5. Bespreking van de wiskundeopgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium - B - 1960 door *Dr. P. M. van Hiele*, Bilthoven.
6. Rondvraag.
7. Sluiting.

De secretaris,

D. Leujes.

HET SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN 1960.

De collega's, die op- of aanmerkingen hebben op de eindexamenvraagstukken wiskunde of mechanica, wordt verzocht deze in te zenden aan de secretaris van Wimecos de heer J. F. Hufferman, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

Akte l.o.-wiskunde

Op 30 maart 1960 heeft de staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen een commissie ingesteld, die belast zal zijn met de herziening van het examenprogramma ter verkrijging van de akte van bekwaamheid voor het geven van lager onderwijs in het vak wiskunde.

In deze commissie zijn benoemd:

tot lid en voorzitter:	prof. H. Th. M. Leeman, Amsterdam;
tot lid en secretaris:	Alb. Smits, 's-Gravenhage;
tot leden:	J. W. Fossen, Heemstede;
	prof. dr. L. Kuipers, Delft;
	E. H. Schmidt, Emmen;
	dr. W. A. M. Burgers, Wassenaar;
	dr. Joh. H. Wansink, Arnhem;
	A. R. Jonker, Utrecht.

EEN INTERESSANT VRAAGSTUK UIT DE ELEMENTAIRE MEETKUNDE

(probleem van Lehmus)

door

R. Kooistra
Culemborg

Het is zeer eenvoudig, uit de gelijkheid van twee hoogtelijnen of van twee zwaartelijnen van een driehoek te besluiten tot de gelijkbenigheid van de driehoek. In elk leerboek van de vlakke meetkunde treffen we dan ook beide sommetjes aan. Tevergeefs zal men echter in de schoolleerboeken zoeken naar het analoge vraagstuk ingeval twee deellijnen gelijk zijn. Dit vanwege de omstandigheid, dat het erg moeilijk is hiervoor een zuiver meetkundig bewijs te geven. Wellicht is het vraagstuk niet algemeen bekend en heeft het dus zin er enige regels aan te wijden, ook voor onze schoolpraktijk. Sommige onzer leerlingen kunnen door dergelijke problemen af en toe tot eigen activiteiten worden gestimuleerd.

Allereerst iets over de geschiedenis van het vraagstuk.

Omstreeks 1840 vroeg Lehmus aan Steiner een elementaire, zuiver meetkundige oplossing van dit vraagstuk en sindsdien is het geregeld aan de orde gebleven. Steiner gaf een bewijs in Crelle's Journal XXVIII 1844, ook Ges. Werke II blz. 323. Omstreeks 1852 dook het vraagstuk in Engeland op. Alsof er niets bekend was, schreef Sylvester in Phil. Mag. IV een artikel "on a simple geometrical problem", waarin hij opmerkt: "It appeared and for the first time, it is believed at the University of Cambridge about a twelvemonth back, where it excited considerable attention". Het trof Sylvester dat alle gegeven meetkundige bewijzen indirect waren. Een direct bewijs werd voor 't eerst gegeven door F. G. Hesse (Californië) aldus (fig. 1):

Maak DE = AB en AE = AF, dan is

$$\triangle ABF \cong \triangle EDA \rightarrow y = x + \tfrac{1}{2}\alpha \text{ en } \angle EDA = \tfrac{1}{2}\beta.$$

Wegens $u = y + \frac{1}{2}\alpha$ en $u = z + \frac{1}{2}\beta$ is dus

$$y + \tfrac{1}{2}\alpha = z + \tfrac{1}{2}\beta \rightarrow x + \alpha = z + \tfrac{1}{2}\beta$$

ofwel:

$$\angle EAB = \angle EDB. \qquad (1)$$

Daar $z + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha + \gamma + \frac{1}{2}\beta = 90 + \frac{1}{2}\gamma$ zijn beide hoeken uit (1) stomp. Derhalve zijn $\triangle$ AEB en $\triangle$ EBD congruent en dus: AE (= AF) = BD. Dus ook $\triangle$ ABF $\cong$ $\triangle$ ABD en dus $\alpha = \beta$.

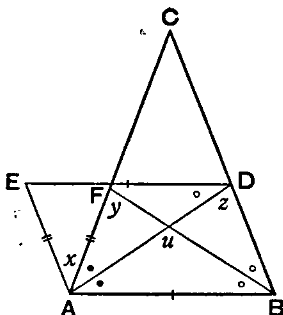


Fig. 1

Ditzelfde bewijs kan men ook vinden in het prachtige leerboek der vlakke meetkunde voor voortgezette studie van P. Wijdenes (blz. 127). De „grote Molenbroek" geeft een indirect bewijs. Het eenvoudigste bewijs van dit type werd door Rougevin gegeven. $\triangle$ ADC en $\triangle$ BFC hebben basis, tophoek en deellijn van de tophoek gelijk. Hun beide omgeschreven cirkels zijn dus congruent. Plaatst men nu $\triangle$ BFC zodanig in de omgeschreven cirkel van $\triangle$ ADC dat BF $\equiv$ AD, dan blijkt gemakkelijk, dat de deellijnen van $\angle$ C in beide driehoeken ongelijk zouden zijn als zij niet samenvielen. Dus AC = BC.

In „Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht XXXV, 1905 geeft ook Eckhardt een indirect bewijs, dat lijkt op dat in het leerboek van Molenbroek. In het Wiskundig Tijdschrift (jaargang I, 1904/1905, blz. 249 e.v.) waaraan het voorafgaande is ontleend, kan men uitgebreider mededelingen over deze materie lezen. Ook vindt men daar een algebraisch bewijs en een fraai goniometrisch bewijs van Sylvester.

Zelfs thans nog houdt men zich met het vraagstuk bezig. Zo vinden we in het december-nummer '59 van "The Mathematical Gazette" een oplossing van S. L. Ho (Hongkong), die lijkt op die van Hesse, maar toch anders is. Wij geven zijn oplossing kort weer (fig. 2):

Construeer EK zo, dat EK = AB en $\angle$ KEB = $\frac{1}{2}\alpha$.

$$\triangle \text{ ADB} \cong \triangle \text{ EBK (ZHZ)} \rightarrow \delta = \tfrac{1}{2}\beta + x.$$

Wegens $\iota = y + \frac{1}{2}\alpha$ en $\iota = \delta + \frac{1}{2}\beta$ is dus: $\angle$ AEK = $\angle$ ABK $\rightarrow z = u$. Derhalve: $\triangle$ EHK $\cong$ $\triangle$ BLA (ZHH), waaruit volgt: EH = BL en HK = AL. Dit laatste geeft $\triangle$ AKH $\cong$ $\triangle$ AKL (ZZH*) $\rightarrow$ AH = KL en dus: AE = BK. Vierhoek ABKE is dus een parallellogram, zodat $\angle$ KEB (= $\frac{1}{2}\alpha$) = $\frac{1}{2}\beta \rightarrow \alpha = \beta$.

Fig. 2

Ter vergelijking vermelden we nog twee algebraisch-meetkundige bewijzen en een goniometrisch bewijs.

Uit $AD^2 = \dfrac{4\,bcs(s-a)}{(b+c)^2}$; $BF^2 = \dfrac{4\,cas(s-b)}{(c+a)^2}$; AD=BF (fig. 1) volgt:

$$a(b+c)^2(s-b) = b(c+a)^2(s-a)$$
$$s[a(b+c)^2 - b(c+a)^2] = ab[(b+c)^2 - (c+a)^2]$$
$$s(a-b)(c^2-ab) = ab(b-a)(a+b+2c)$$
$$(a-b)[(a+b+c)(c^2-ab) + 2ab(a+b+2c)] = 0$$
$$(a-b)[c^3 + (a+b)c^2 + 3\,abc + ab(a+b)] = 0$$

Daar de tweede factor in het eerste lid niet nul kan zijn, moet $a = b$ zijn.

Fraai is het volgende bewijs (zie Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 46e jg. '58/'59, no 5, blz. 225):

Stel (fig. 1):

$$BD = kc,\ DC = kb,\ AF = lc \text{ en } CF = la.$$

Wegens $b + c > a$ en $a + c > b$, is $k \neq 1$ en $l \neq 1$.

We hebben dus:

$$bc - k^2bc = ac - l^2ac$$
$$b - k^2b = a - l^2a \qquad (1)$$

$$la + lc - k^2b = kb + kc - l^2a$$
$$l(kb + kc) + lc - k^2b = k(la + lc) + kc - l^2a$$
$$l(kb + c + la) = k(la + c + kb).$$

Daar $kb + c + la \neq 0$ is, is $l = k$.

In (1) gesubstitueerd geeft dit: $(1 - k^2)(a - b) = 0$, dus $a = b$ wegens $k \neq 1$.

Stel $\angle A = 2\alpha$ en $\angle B = 2\beta$, dan geeft de sinusregel in $\triangle$ ABD en $\triangle$ ABF: $c : AD = \sin(2\beta + \alpha) : \sin 2\beta$ en
$c : BF = \sin(2\alpha + \beta) : \sin 2\alpha$.

Wegens AD = BF hebben we dus:

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin(2\beta+\alpha)}{\sin 2\beta}$$

$$\sin 2\alpha \sin(2\beta+\alpha)=\sin 2\beta \sin(2\alpha+\beta)$$

$$\cos(3\alpha+2\beta)-\cos(\alpha-2\beta)=\cos(2\alpha+3\beta)-\cos(\beta-2\alpha)$$

$$\cos(3\alpha+2\beta)-\cos(2\alpha+3\beta)=\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\beta-2\alpha)$$

$$\sin\tfrac{5}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta).$$

Stel nu $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=p$ en $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=q$, dan gaat de laatste betrekking over in:

$$\sin 5p \sin q+\sin p \sin 3q=0.$$

$$\sin 5p \sin q+\sin p(3\sin q-4\sin^3 q)=0.$$

$$\sin q\,\{\sin 5p+3\sin p-2\sin p(1-\cos 2q)\}=0.$$

$$\sin q(\sin 5p+\sin p+2\sin p\cos 2q)=0.$$

$$2\sin q(\sin 3p\cos 2p+\sin p\cos 2q)=0.$$

Nu is $2(\alpha+\beta)<180°$ en dus $p<45°$;

$$|2q|=|\alpha-\beta|<(\alpha+\beta)<90°.$$

De laatste factor in het eerste lid is dus positief en derhalve is

$$\sin q=0\rightarrow\alpha=\beta\rightarrow a=b.$$

Als merkwaardigheid valt tenslotte nog op te merken, dat de analoge eigenschap voor twee gelijke buiten-deellijnen niet geldt. Er bestaan nl. driehoeken met gelijke buiten-deellijnen van α en β, waarbij toch $a\neq b$. Een mooi voorbeeld hiervan is $\triangle$ ABC met $\alpha=132°$ en $\beta=12°$ (zie fig. 3). Wiskundigen als Steiner, Alauda en Neuberg hebben zich met dit soort driehoeken bezig gehouden. Een uitgebreid artikel betreffende bijzonderheden over de driehoeken met twee gelijke buiten-deellijnen, die toch niet gelijkbenig zijn, kan men vinden in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 46e jg. '58/'59 afl. V van de hand van W. J. Reuvecamp (Deventer).

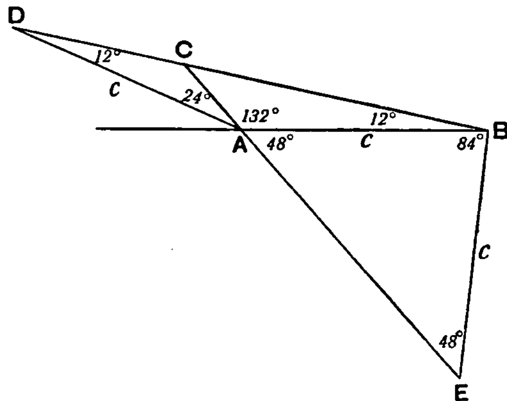


Fig. 3

WISKUNDE IN DE LEERLINGENBIBLIOTHEEK

De volgende boekenlijst stuurde ik onlangs aan een collega naar aanleiding van een vraag zijnerzijds, of ik ook titels kon noemen van boeken over wiskunde, die in de leerlingenbibliotheek op hun plaats zouden zijn. Smaken verschillen en misschien vindt niet iedereen alle genoemde boeken geschikt. Dat laat ik gaarne aan ieders beoordeling over. Hoofdzaak is, dat wij elkaar op de hoogte brengen van wat er op dit gebied is. Daarom hoop ik, dat deze opgave door anderen aangevuld zal worden. Ook hiervoor zal de redactie van Euclides zeker haar medewerking willen verlenen.

Bunt c.s.	Van Ahmes tot Euclides.
Van der Waerden	Ontwakende Wetenschap.
D. J. Struik	A Concise History of Mathematics.
Bell	Man of Mathematics. (2 dln.)
Neugebauer	The Exact Sciences in Antiquity.
T. Dantzig	Number, the Language of Science.
Menninger	Zahlwort und Ziffer.
Hogben	Meten is Weten.
Farrington	Greek Science. (2 dln.)
Van Straaten	Prothuron.
Lietzmann	Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen.
Hogben	De consequenties van 1 = 1.
Colerus	Van 1 × 1 naar integraal.
Colerus	Van punt naar vierde dimensie.
Van Leeuwen	2 × 2 = 5.
Sawyer	Mathematician's Delight.
Sawyer	Prelude to Mathematics.
Freudenthal	Van sterren tot inlegzolen.
Huffer	Wiskunde.
Een Vierkant	Platland.
Burger	Bol-land
Dijksterhuis	Vreemde woorden in de wiskunde.
Bottema	Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde.
Menninger	Rechenkniffe.

Enkele van deze boeken (zoals Platland) zijn alleen nog maar antiquarisch te bemachtigen.

D. LEUJES.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

29. Iemand heeft 10 zakken ronde, éénkleurige kogeltjes; in één zak bevinden zich kogeltjes van 1,1 gram, in de andere zakken kogeltjes van 1 gram. In welke zak de zwaardere kogeltjes zitten, door slechts één weging vast te stellen.

30. Een volksteller A en een publieke-opinie onderzoeker B (beiden wiskundig geschoold), komen tegelijk aan bij een huis op Main Street 900. Zij willen de leeftijden van de bewoners weten. Daar er niemand thuis is, wenden zij zich tot een buurman, die hun vertelt, dat er drie personen in dat huis wonen, waarvan het produkt der leeftijden (3 verschillende gehele getallen) gelijk is aan het huisnummer, dus 900. Daar dat klaarblijkelijk niet voldoende is om de leeftijden te bepalen zegt hij: „Ik zal de teller de middelste der drie leeftijden meedelen", en hij fluistert deze dit getal in, waarop deze antwoordt dat hij met dit gegeven de leeftijden nog niet kan bepalen. De buurman zegt dan: „Ik zal de enquêteur de som meedelen van de leeftijden van de oudste en één der beide anderen". Hij fluistert hem dit getal in, waarop deze zegt, het probleem ook niet te kunnen oplossen. Vervolgens vraagt hij beiden om beurten.

A zegt: ik weet het niet. B zegt: ik weet het niet.
A zegt: ik weet het niet. B zegt: ik weet het niet.
A zegt: ik weet het niet. B zegt: nu ken ik de drie leeftijden!

(Met kleine veranderingen ontleend aan Thomas L. Saaty, Mathematical methods Operations Research, 1959, waarin nog vele andere dergelijke probleempjes voorkomen.)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

27. Onderstel het kleinste getal begint met een 2. Dan ziet men gemakkelijk, dat daarop zou moeten volgen 1, 0, 5, ... Maar dan zou het getal, dat hieruit ontstaat door de voorste 2 weg te laten, ook aan de eis voldoen en hadden we dus niet het kleinste getal gevonden, dat voldoet. Op dezelfde manier zien we, dat het getal niet met een 3, 4, . . ., 9 beginnen kan. Het begint dus met een 1. Het getal wordt dan 105263157894736842.

28. De leeftijden zouden kunnen zijn:

1	1	72	1	6	12	2	4	9
1	2	36	1	8	9	2	6	6
1	3	24	2	2	18	3	3	8
1	4	18	2	3	12	3	4	6

Hierbij zijn twee mogelijke series met dezelfde som, n.l. 2, 6, 6 en 3, 3, 8; de som is 14. Dat is dus B's huisnummer. Aangezien er een oudste is, zijn de leeftijden 3, 3 en 8.